
Z 1 5/1
T. 15 N 8

ЗАПИСКИ
ИМПЕРАТОРСКАГО РУССКАГО ГЕОГРАФИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.
ПО ОБЩЕЙ ГЕОГРАФІИ.
ТОМЪ XV, № 8.
ИЗДАННЫЙ ПОДЪ РЕДАКЦІЕЮ И. В. МУШКЕТОВА.

НѢКОТОРЫЯ ПРИЛОЖЕНІЯ ТЕОРІИ ВѢРОЯТНОСТЕЙ КЪ МЕТЕОРОЛОГІИ.

І. А. Клейбера.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.
ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.
Вас. Остр., 9 лин., № 12.
1887.

ЗАПИСКИ
ИМПЕРАТОРСКАГО РУССКАГО ГЕОГРАФИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.
ПО ОБЩЕЙ ГЕОГРАФІИ.
ТОМЪ XV, № 8.
ИЗДАННЫЙ ПОДЪ РЕДАКЦІЕЮ И. В. МУШКЕТОВА.

НѢКОТОРЫЯ ПРИЛОЖЕНІЯ
ТЕОРІИ ВѢРОЯТНОСТЕЙ
КЪ МЕТЕОРОЛОГІИ.

І. А. Клейвера.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.
ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.
Вас. Остр., 9 лин., № 12.
1887.

Напечатано по распоряженію Императорскаго Русскаго Географическаго Общества.



Въ настоящей статьѣ я намѣренъ приложить нѣкоторыя основныя положенія математичеккой теоріи вѣроятностей къ изслѣдованію ряда данныхъ о вскрытіи и замерзаніи Невы въ теченіи 180 лѣтъ 1706—1886 года. Методъ изслѣдованія въ нѣкоторыхъ случаяхъ близко подходитъ къ тому, который былъ впервые примѣненъ къ задачамъ метеорологіи В. П. Кеппеномъ [1]); однако я примѣняю положенія теоріи вѣроятностей нѣсколько иначе, и ввожу въ свое изслѣдованіе нѣкоторыя новыя теоремы, еще не приложенныя къ метеорологіи. Я выбралъ именно эти данныя — о вскрытіи и замерзаніи Невы, сначала какъ примѣръ для иллюстраціи предлагаемыхъ методовъ, и выбралъ поэтому этотъ рядъ какъ одинъ изъ наиболѣе продолжительныхъ рядовъ наблюденій. Но получившіеся результаты оказались на столько интересными, что я сталъ уже продолжать изслѣдованіе не только съ методологической но и съ метеорологической точки зрѣнія.

---

[1]) См. его статью въ «*Repertorium für Meteorologie*» *1872.* или Sprung. «*Lehrbuch der Meteorologie*», Hamburg 1886. S.

I.

1. Привожу сперва данныя наблюденія о времени вскрытія и замерзанія Невы. Въ слѣдующей таблицѣ даны дни вскрытія и остановки льда на Невѣ у С.-Петербурга. Въ первомъ столбцѣ данъ № года, во второмъ озаглавленномъ A — день вскрытія Невы въ соотвѣтствующемъ году; дни года считаются отъ 1 до 365 (или до 366 въ високосные года) такъ что напр. 94 день означаетъ 4 Апрѣля, и т. д. Въ слѣдующемъ столбцѣ помѣщена разность $A—A_0$ между днемъ вскрытія Невы въ указанномъ году и среднимъ днемъ вскрытія ея за все время 1706—1886 г. Далѣе, въ четвертомъ столбцѣ, даны разности ΔA между днями вскрытія каждыхъ двухъ послѣдовательныхъ годовъ. Въ пятомъ, шестомъ и седьмомъ столбцахъ написаны подобныя же данныя для времени замерзанія Невы, а именно Z — день замерзанія, $Z—Z_0$ уклоненіе отъ средняго и ΔZ послѣдовательныя разности. Восьмой столбецъ, D, содержитъ разности $Z—A$ и указываетъ число дней въ каждомъ году, въ теченіи которыхъ Нева была свободна отъ льда, въ девятомъ столбцѣ помѣщены уклоненія $D—D_0$ этихъ чиселъ отъ средняго значенія ихъ и наконецъ въ десятомъ и послѣднемъ разности послѣдовательныхъ значеній D. Въ нѣкоторые года (1709, 1712, 1768) время остановки льда (Z) неизвѣстно, неизвѣстно слѣдовательно и D для этихъ годовъ; поэтому въ столбцахъ Z, $Z—Z_0$, D, $D—D_0$ недостаетъ трехъ данныхъ, а въ ΔZ, ΔD — шести. Для тѣхъ годовъ, въ которые Нева остановилась два раза, т. е. остановившись разъ, прорывала ледъ и потомъ снова замерзала,—взятъ день окончательной остановки льда. Точно также для тѣхъ годовъ гдѣ Нева вскрывалась два раза, взятъ день окончательнаго вскрытія льда.

Годъ.	A	$A-A_0$	ΔA	Z	$Z-Z_0$	ΔZ	D	$D-D_0$	ΔD
1706	94	— 6	— 3	319	— 0	+ 0	225	+ 6	+12
07	91	— 9	+14	318	— 1	± 1	227	+ 8	—14
08	105	+ 5	— 1	318	— 1		213	— 6	
09	104	+ 4	— 1	?	?		?		
10	103	+ 3	— 5	362	+43	—61	259	+40	—56
1711	98	— 2	+ 1	301	—18		203	—16	
12	99	— 1	— 5	?	?		?		
13	94	— 6	+16	305	—14	—27	211	— 8	+11
14	110	+10	—18	332	+13	— 6	222	+ 3	+24
15	92	— 8	+17	338	+19	—17	246	+27	—34
1716	109	+ 9	— 9	321	+ 2	— 9	212	— 7	± 0
17	100	— 0	+ 7	312	— 7	+ 4	212	— 7	— 3
18	107	+ 7	+ 2	316	— 3	+18	209	—10	+16
19	109	+ 9	— 6	334	+15	—22	225	+ 6	—16
20	103	+ 3	— 3	312	— 7	+ 2	209	—10	+15
1721	100	— 0	+ 6	324	— 5	+18	224	+ 5	+ 2
22	106	+ 6	—25	332	+13	—12	226	+ 7	+13
23	81	—19	+17	320	+ 1	+ 4	239	+20	—13
24	98	— 2	+ 4	324	+ 5	+ 8	226	+ 7	+ 4
25	102	+ 2	— 6	332	+13	— 4	230	+11	+ 2
1726	96	— 4	+ 8	328	+ 9	+ 6	232	+13	— 2
27	104	+ 4	—17	334	+15	—13	230	+11	+ 4
28	87	—13	+ 9	321	+ 2	+13	234	+15	+ 4
29	96	— 4	+ 6	334	+15	—21	238	+19	—27
30	102	+ 2	+12	313	— 6	+11	211	— 8	— 1
1731	114	+14	—19	324	+ 5	+ 8	210	— 9	+27
32	95	— 5	+ 9	332	+13	— 5	237	+18	—14
33	104	+ 4	+ 1	327	+ 8	—22	223	+ 4	—23
34	105	+ 5	—20	305	—14	± 0	200	—19	+20
35	85	—15	+18	305	—14	+ 7	220	+ 1	—11
1736	103	+ 3	— 2	312	— 7	+ 1	209	—10	+ 3
37	101	+ 1	± 0	313	— 6	± 0	212	— 7	± 0
38	101	+ 1	+15	313	— 6	—16	212	— 7	—31
39	116	+16	— 1	297	—22	+22	181	—38	+23
40	115	+15	— 6	319	+ 0	+ 1	204	—15	+ 5
1741	109	+ 9	+ 7	318	— 1	+ 7	209	—10	± 0
42	116	+16	—27	325	+ 6	— 1	209	—10	+26
43	89	—11	+ 7	324	+ 5	— 3	235	+16	—10
44	96	— 4	+ 4	321	+ 2	—20	225	+ 6	—24
45	100	— 0	+ 4	309	—18	+11	201	—18	+ 7
1746	104	+ 4	+ 9	312	— 7	± 0	208	—11	—11
47	115	+15	—10	312	— 7	— 4	197	—22	+ 6
48	105	+ 5	+ 9	308	—11	+16	203	—16	+ 7
49	114	+14	—30	324	+ 5	—28	210	— 9	+ 7
50	84	—16	+ 2	296	—23	+15	212	— 7	+13

Годъ.	A	$A-A_0$	ΔA	Z	$Z-Z_0$	ΔZ	D	$D-D_0$	ΔD
1751	86	—14	+11	311	— 8	+10	225	+ 6	— 1
52	97	— 3	— 1	321	+ 2	+ 9	224	+ 5	+10
53	96	— 4	+ 1	330	+11	—10	234	+15	—11
54	97	— 3	— 4	320	+ 1	—10	223	+ 4	+12
55	93	— 7	± 0	328	— 9	+ 7	235	+16	—11
1756	93	— 7	— 6	317	— 2	+ 7	224	+ 5	+13
57	87	—13	+12	324	+ 5	—16	237	+18	—28
58	99	— 1	+ 1	308	—11	+ 5	209	—10	+ 4
59	100	— 0	+12	313	— 6	+10	213	— 6	— 2
60	112	+12	—18	323	+ 4	— 3	211	— 8	+15
1761	94	— 6	— 2	320	+ 1	+ 4	226	+ 7	+ 6
62	92	— 8	+21	324	+ 5	—12	232	+13	—33
63	113	+13	—21	312	— 7	+17	199	—20	+38
64	92	— 8	— 4	329	+10	— 1	237	+18	— 3
65	88	—12	+10	328	+ 9	— 1	240	+21	—11
1766	98	— 2	— 7	327	+ 8	+ 8	229	+10	+16
67	91	— 9	+15	335	+16		245	+26	
68	106	+ 6	—10	?	?		?		
69	96	— 4	± 0	293	—26	+22	197	—22	+22
70	96	— 4	+13	315	— 4	+ 1	219	+ 0	—12
1771	109	+ 9	—11	316	— 3	+31	207	—12	+42
72	98	— 2	— 3	347	+28	—35	249	+30	—32
73	95	— 5	+ 5	312	— 7	—12	217	— 2	—11
74	100	— 0	+ 1	300	—19	+ 4	200	—19	+ 3
75	101	+ 1	+ 4	304	—15	+ 2	203	—16	— 2
1776	105	+ 5	+ 4	306	—13	+13	201	—18	+ 9
77	109	+ 9	—11	319	+ 0	—13	210	— 9	— 2
78	98	— 2	— 8	306	—13	+19	208	—11	+27
79	90	—10	+11	325	+ 6	—10	235	+16	—21
80	101	+ 1	+ 3	315	— 4	+ 3	214	— 5	± 0
1781	104	+ 4	— 6	318	— 1	— 3	214	— 5	+ 3
82	98	— 2	+ 6	315	— 4	— 5	217	— 2	—11
83	104	+ 4	+ 1	310	— 9	+19	206	—13	+18
84	105	+ 5	+ 7	329	+10	+ 2	224	+ 5	— 5
85	112	+12	—11	331	+12	—32	219	+ 0	—21
1786	101	+ 1	+ 2	299	—20	+19	198	—21	+17
87	103	+ 3	— 3	318	— 1	— 8	215	— 4	— 5
88	100	— 0	+ 9	310	— 9	+ 9	210	— 9	± 0
89	109	+ 9	+ 2	319	+ 0	— 1	210	— 9	— 3
90	111	+11	—11	318	— 1	+11	207	—12	+22
1791	100	— 0	— 9	329	+10	—13	229	+10	— 4
92	91	— 9	+ 8	316	— 3	+ 8	225	+ 6	± 0
93	99	— 1	— 9	324	+ 5	+13	225	+ 6	+22
94	90	—10	+ 9	337	+18	— 3	247	+28	—12
95	99	— 1	+ 3	334	+15	—15	235	+16	—18

Годъ.	A	$A-A_0$	ΔA	Z	$Z-Z_0$	ΔZ	D	$D-D_0$	ΔD
1796	102	+ 2	— 8	319	+ 0	— 4	217	— 2	+ 4
97	94	— 6	+ 5	315	— 4	+ 3	221	+ 2	— 2
98	99	— 1	— 1	318	— 1	+ 9	219	+ 0	—10
99	98	— 2	+ 5	327	+ 8	—11	229	+10	—16
1800	103	+ 3	— 8	316	— 3	+26	213	— 6	+34
1801	95	— 5	—12	342	+23	—41	247	+28	—29
02	83	—17	+ 2	301	—18	+ 8	218	— 1	+ 3
03	85	—15	+20	309	—10	— 7	221	+ 2	—24
04	105	+ 5	— 6	302	—17	—13	197	—22	— 7
05	99	— 1	+ 5	289	—30	+13	190	—29	+ 8
1806	104	+ 4	+14	302	—17	+28	198	—21	+12
07	118	+18	—14	328	+ 9	— 6	210	— 9	+ 8
08	104	+ 4	+ 2	322	+ 3	—15	218	— 1	—17
09	106	+ 6	+14	307	—12	+60	201	—18	—14
10	120	+20	—18	367	+48	—76	287	—32	+ 2
1811	102	+ 2	+ 5	291	—28	+12	189	—30	+ 7
12	107	+ 7	—17	303	—16	+30	196	—23	+47
13	90	—10	+ 6	333	+14	— 3	243	+24	— 9
14	96	— 4	+ 4	330	+11	— 6	234	+15	—10
15	100	— 0	+ 1	324	+ 5	—11	229	+ 5	—12
1816	101	+ 1	± 0	313	— 6	± 0	212	— 7	± 0
17	101	+ 1	+ 6	313	— 6	+ 6	212	— 7	± 0
18	107	+ 7	— 8	319	+ 0	—19	212	— 7	—11
19	99	— 1	— 3	300	—19	+ 7	201	—18	+10
20	96	— 4	+ 8	307	—12	+20	211	— 8	+12
1821	104	+ 4	—39	327	+ 8	+13	223	+ 4	+56
22	65	—35	+21	344	+25	—33	279	+60	—54
23	86	—14	+ 7	311	— 8	+30	225	+ 6	+23
24	93	— 7	+ 3	341	+22	—16	248	+29	—19
25	96	— 4	—14	325	+ 6	+23	229	+10	+37
1826	82	—18	+ 9	348	+29	— 9	266	+47	—18
27	91	— 9	+11	339	+20	—27	248	+29	—38
28	102	+ 2	+ 9	312	— 7	+27	210	— 9	+18
29	111	+11	—12	339	+20	—16	228	+ 9	— 4
30	99	— 1	— 5	323	+ 4	— 4	224	+ 5	+ 1
1831	94	— 6	+ 1	319	+ 0	—13	225	+ 6	—14
32	95	— 5	+ 8	306	—13	+18	211	— 8	+16
33	103	+ 3	—13	324	+ 5	—15	227	+ 8	— 8
34	90	—10	+16	309	—10	+25	219	+ 0	+ 9
35	106	+ 6	+ 7	334	+15	—15	228	+ 9	—22
1836	113	+13	—10	319	+ 0	+13	206	—13	+23
37	103	+ 3	+ 3	332	+13	—19	229	+10	—22
38	106	+ 6	+ 4	313	— 6	—10	207	—12	—14
39	110	+10	— 8	303	—16	+ 7	193	—26	+15
40	102	+ 2	— 7	310	— 9	+32	208	—11	—39

Годъ.	A	$A-A_0$	ΔA	Z	$Z-Z_0$	ΔZ	D	$D-D_0$	ΔD
1841	95	— 5	+10	342	+23	—31	247	+28	—41
42	105	+ 5	— 1	311	— 8	± 0	206	—13	+ 1
43	104	+ 4	± 0	311	— 8	± 0	207	—12	± 0
44	104	+ 4	+ 9	311	— 8	+24	207	—12	+15
45	113	+13	—24	335	+16	—13	222	+ 3	+11
1846	89	—11	+24	322	+ 3	+20	233	+14	— 4
47	113	+13	—33	342	+23	—32	229	+10	+ 1
48	80	—20	+27	310	— 9	+ 8	230	+11	— 5
49	107	+ 7	— 4	318	— 1	— 9	225	+ 6	—19
50	103	+ 3	— 7	309	—10	+17	206	—13	+24
1851	96	— 4	+23	326	+ 7	—35	230	+11	—58
52	119	+19	—13	291	—28	+31	172	—47	+42
53	106	+ 6	— 2	322	+ 3	— 9	216	— 3	— 7
54	104	+ 4	— 7	313	— 6	+ 2	209	—10	+ 9
55	97	— 3	+12	315	— 4	—12	218	— 1	—24
1856	109	+ 9	—17	303	—16	+16	194	—25	+33
57	22	— 8	+17	319	+ 0	—16	227	+ 8	—33
58	109	+ 9	—12	303	—16	+ 6	194	—25	+18
59	97	— 3	— 1	309	—10	+13	212	— 7	—14
60	96	— 4	+ 8	322	+ 3	—18	226	+ 7	—26
1861	104	+ 4	+ 2	304	—15	+ 7	200	—19	+ 5
62	106	+ 6	—12	311	— 8	+34	205	—14	+46
63	94	— 6	+12	345	+26	—47	251	+32	—59
64	106	+ 6	— 9	398	—21	+26	192	—27	+35
65	97	— 3	— 2	324	+ 5	—14	227	+ 8	—12
1866	95	— 5	+18	310	— 9	+ 2	215	— 4	—16
67	113	+13	+14	312	— 7	— 2	199	—20	+12
68	99	— 1	— 4	310	— 9	+ 2	211	— 8	+ 6
69	95	— 5	+ 4	312	— 7	+42	217	— 2	+38
70	99	— 1	—10	354	+35	—45	255	+36	—35
1871	89	—11	+ 8	309	—10	+20	220	+ 1	+14
72	93	— 3	+11	309	+10	—18	236	+15	—31
73	108	+ 8	—10	311	— 8	+ 1	203	—16	+11
74	98	— 2	+13	312	— 7	—13	214	— 5	—26
75	111	+11	—14	299	—20	+36	188	—31	+50
1876	97	— 3	+ 8	335	+16	+ 7	238	+19	— 1
77	105	+ 5	—16	342	+23	— 1	237	+18	+15
78	89	—11	+ 8	341	+22	—24	252	+33	—32
79	97	— 3	— 1	317	— 2	—26	220	+ 1	—25
80	96	— 4	+15	291	—28	+42	195	—24	+27
1881	111	+11	—34	333	+14	—30	222	+ 3	+ 4
82	77	—23	+27	303	—16	+24	226	+ 7	—13
83	104	+ 4	— 2	327	+ 8	—13	213	— 6	— 1
84	102	+ 2	— 0	314	— 5	— 2	212	— 7	± 0
85	100	— 0	—13	312	— 7		212	— 7	
1886	87	—13							

2. Среднiй день вскрытiя льда на Невѣ есть

$$A_0 = \frac{\Sigma A}{n} = 100.0$$

Точно также для средняго дня остановки льда получается

$$Z_0 = \frac{\Sigma Z}{n_2} = 318{,}9$$

и наконецъ среднее значенiе D есть

$$D_0 = \frac{\Sigma D}{n_3} = \frac{\Sigma Z}{n_2} - \frac{\Sigma A}{n_1} = Z_0 - A_0 = 218{,}9$$

т. е. среднее время вскрытiя льда на Невѣ есть 10.0 Апрѣля
» » остановки » » » » 14.9 Ноября

и среднее число дней, въ теченiи которыхъ Нева
бываетъ свободна отъ льда. . . . . 218,9 или 0.600 года

а слѣдовательно среднее число дней, въ теченiи которыхъ
Нева скована льдомъ есть 365.2 — 218.9 = 146.3 или 0.400 года

Въ столбцахъ разностей приведенной выше таблицы приняты округленныя значенiя A_0, Z_0 и D_0 — 100,0, 319,0, 219,0 чтобы не вводить лишняго десятичнаго знака; эта неточность нисколько не влiяетъ на ходъ дальнѣйшихъ разсужденiй. (Въ тѣхъ случаяхъ, когда разность $A - A_0$, $Z - Z_0$ или $D - D_0$ оказывалась $= 0$, я ставилъ -0 для $A - A_0$ и $+0$ для $Z - Z_0$ и $D - D_0$, такъ какъ A_0 нѣсколько больше 100, Z_0 и D_0 нѣсколько меньше 319 и 219.)

3. Точность полученныхъ результатовъ измѣряется величиною средней или вѣроятной ошибки ихъ, т. е. величиною

средней ошибки $\varepsilon = \sqrt{\frac{\Sigma \delta^2}{n(n-1)}}$

или вѣроятной ошибки $\eta = \frac{2}{3}\varepsilon$

если черезъ δ означить разности $A - A_0$, $Z - Z_0$, $D - D_0$.

Но при достаточно большомъ числѣ наблюденій можно, чтобы не вычислять квадратовъ ошибокъ, находить значенія ε и η, съ удовлетворительною точностью по формуламъ

$$\varepsilon = \frac{1{,}794}{\sqrt{2n-1}} \cdot \frac{\Sigma(\delta)}{n}$$

$$\eta = \frac{1{,}196}{\sqrt{2n-1}} \cdot \frac{\Sigma(\delta)}{n}$$

гдѣ черезъ (δ) означены абсолютныя величины уклоненій, взятыя всѣ съ однимъ и тѣмъ же знакомъ $+$

По послѣдней формулѣ находимъ для вѣроятныхъ ошибокъ A_0, Z_0 и D_0 слѣдующія значенія

вѣр. ошибка A_0 0.424
Z_0 0.675
D_0 0.836

такъ что, слѣдовательно,

$$A_0 = 100{,}0 \pm 0{,}42$$
$$Z_0 = 318{,}9 \pm 0{,}67$$
$$D_0 = 218{,}9 \pm 0{,}84$$

4. Кромѣ этихъ данныхъ и гораздо большій интересъ представляютъ *вѣроятныя уклоненія отдѣльныхъ данныхъ* отъ средняго результата.

Между тѣмъ какъ средняя или вѣроятная ошибка результата (ε или η) зависитъ отъ числа наблюденій, уменьшаясь пропорціонально квадратному корню изъ числа ихъ, среднее или вѣроятное уклоненіе отдѣльныхъ наблюденій отъ средняго результата не зависитъ отъ числа наблюденій, а только отъ характера, измѣнчивости этого явленія.

Среднее уклоненіе e одного наблюденія и вѣроятное уклоненіе w, получаются изъ формулъ

$$e = \sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{n}} = \varepsilon\sqrt{n-1} = 1{,}269\ \frac{\Sigma(\delta)}{n}$$

$$w = \tfrac{2}{3}e = 0{,}846\ \frac{\Sigma(\delta)}{n}.$$

Нѣкоторые метеорологи принимаютъ за мѣру измѣнчивости (variabilité) простую арифметическую среднюю изъ абсолютныхъ величинъ уклоненій отдѣльныхъ результатовъ; при достаточно большомъ числѣ наблюденій всѣ указанныя мѣры уклоненій пропорціональны и поэтому безразлично, которую изъ нихъ употреблять въ вычисленіяхъ. Желательно однако, чтобы метеорологи пришли къ соглашенію относительно этого вопроса, и давали бы всегда одну и ту-же мѣру измѣнчивости. Здѣсь я привожу величины w, т. е. вѣроятныя уклоненія отдѣльныхъ результатовъ отъ средняго значенія ихъ. Если означить черезъ δ_0 среднюю арифметическую изъ абсолютныхъ величинъ уклоненій то между w и δ_0 существуетъ при достаточно большомъ числѣ наблюденій, и если эти наблюденія подчиняются закону ошибокъ о которомъ будетъ говорено ниже, — слѣдующая зависимость

$$w = 0{,}846\,\delta_0$$
$$\delta_0 = 1{,}182\,w$$

5. Въ нашемъ примѣрѣ получается

для A . . . . $w = 5{,}63$ дней
для Z . . . . $w = 8{,}95$ »
для D . . . . $w = 11{,}09$ »

Такъ какъ вѣроятное уклоненіе чиселъ ряда Z оказывается больше вѣроятнаго уклоненія чиселъ ряда A, то отсюда заключаемъ, что

Время остановки льда на Невѣ болѣе подвержено случайнымъ колебаніямъ (болѣе измѣнчиво) *чѣмъ время вскрытія его.*

Величины w для A, Z и D указываютъ еще на одно важное обстоятельство, которое мы подробнѣе изслѣдуемъ ниже.

Изъ теоріи ошибокъ извѣстно, что если вѣроятная ошибка нѣкоторой величины x есть $w(x)$ и нѣкоторой другой величины y, *независимой отъ* x — $w(y)$ то вѣроятная ошибка суммы или разности этихъ двухъ величинъ равна квадратному корню изъ суммы квадратовъ вѣроятныхъ ошибокъ самихъ этихъ количествъ, т. е.

$$w(x \pm y) = \sqrt{[w(x)]^2 + [w(y)]^2}$$

Но у насъ D есть разность между Z и A поэтому, мы могли бы ожидать, что между $w(A)$, $w(Z)$ и $w(D)$ окажется слѣдующая зависимость

$$w(D) = \sqrt{[w(Z)]^2 + [w(A)]^2}$$

но въ дѣйствительности мы находимъ

$$\sqrt{[w(Z)]^2 + [w(A)]^2} = 10.57$$

$$w(D) = 11.09$$

т. е. $w(D)$ нѣсколько больше того значенія которое получается для него изъ A и Z; слѣдовательно можно предполагать, что событія A и Z не вполнѣ независимы одно отъ другаго, но что въ томъ случаѣ когда Нева вскрывается раньше нормальнаго срока, она имѣетъ стремленіе остановиться *позже* нормальнаго и наоборотъ, вслѣдствіе чего еще болѣе увеличивается колебаніе въ ряду значеній D.

6. Разсмотримъ теперь ряды разностей $A—A_0$, $Z—Z_0$, $D—D_0$, помѣщенные въ нашей таблицѣ. Очевидно по самому свойству арифметической средней, что сумма положительныхъ разностей должна быть равна суммѣ отрицательныхъ разностей въ каждомъ изъ этихъ трехъ случаевъ. Точно также теоретическое число положительныхъ и отрицательныхъ разностей, для явленія имѣющаго случайный характеръ, одинаково, т. е. уклоненія въ обѣ стороны отъ средняго равно вѣроятны. Однако это не всегда имѣетъ мѣсто въ физическихъ явленіяхъ; такъ напр. извѣстно, что наибольшія уклоненія отъ средняго давленія атмосферы въ какомъ нибудь мѣстѣ возможны въ отрицательную сторону, гдѣ они почти въ два раза превышаютъ наибольшія уклоненія въ положительную сторону, которыя зато встрѣчаются вдвое чаще первыхъ.

Сосчитавъ число знаковъ + и — въ столбцахъ разностей $A—A_0$, $Z—Z_0$, $D—D_0$ мы увидимъ, что число отрицательныхъ

уклоненій во всѣхъ трехъ случаяхъ превышаетъ число положительныхъ уклоненій отъ средняго, какъ видно изъ слѣдтющей таблицы.

II. Число положительныхъ и отрицательныхъ уклоненій отъ средняго въ A, Z и D.

	$A-A_0$	$Z-Z_0$	$D-D_0$
Число +	87	82	85
Число —	94	95	92
	181	177	177

Но такъ какъ сумма положительныхъ и отрицательныхъ уклоненій есть 0, то средняя величина положительныхъ уклоненій должна быть больше средней величины отрицательныхъ уклоненій. Дѣйствительно среднія величины этихъ уклоненій суть:

III. Среднія величины положительныхъ и отрицательныхъ уклоненій отъ средняго въ A, Z и D.

	$A-A_0$	$Z-Z_0$	$D-D_0$
Средн. величина полож. уклон. . .	6.86	11.10	13.33
Средн. величина отриц. уклон. . .	6.37	10.00	12.92

Отсюда получается то странное заключеніе, что если Нева вскрывается *позже* нормальнаго срока, то вообще говоря ея запаздываніе больше чѣмъ преждевременныя вскрытія льда. Точно также средняя величина запаздыванія замерзанія Невы больше средней величины уклоненія въ противоположную сторону; и наконецъ продолжительность свободнаго отъ льда состоянія Невы больше отклоняется отъ нормальной въ тѣхъ случаяхъ, когда

Нева дольше остается не замерзшею, чѣмъ въ противоположныхъ случаяхъ.

Какова физическая причина этого явленія — я не берусь объяснить.

7. Обращаясь опять къ таблицамъ уклоненій, сосчитаемъ въ нихъ число перемѣнъ знаковъ изъ + въ — и изъ — въ +. Два сосѣднихъ знака могутъ представлять вообще слѣдующія четыре комбинаціи

$$+\,+,\quad +\,-,\quad -\,+,\quad -\,-$$

Въ томъ случаѣ когда оба знака равновозможны и когда знакъ даннаго количества не вліяетъ на знакъ слѣдующаго за нимъ, то вѣроятности всѣхъ этихъ четырехъ комбинацій равны, и, слѣдовательно, равны $\frac{1}{4}$. Въ нашемъ случаѣ во всѣхъ трехъ столбцахъ разностей знаки + и — неравновозможны; назовемъ вѣроятность + черезъ p, вѣроятность — черезъ q; тогда вѣроятности написанныхъ комбинацій суть:

вѣроятность + + ... p^2
» + — . . . . . . pq
» — + ... qp
» — — . . . . . . q^2

Вѣроятность перемѣны знака, т. е. вѣроятность одной изъ двухъ комбинацій + — или — + есть $2pq$; вѣроятность повторенія знака, т. е. одной изъ двухъ комбинацій + + или — — есть $p^2 + q^2$.

Но вѣроятности p и q суть отношенія числа + и — къ числу всѣхъ разностей, такъ что имѣемъ

для A $\quad p = \frac{87}{181} = 0{,}481$
$\quad q = \frac{94}{181} = 0{,}519$

для Z $\quad p = \frac{82}{177} = 0{,}463$
$\quad q = \frac{95}{177} = 0{,}537$

для D $\quad p = \frac{85}{177} = 0{,}480$
$\quad q = \frac{92}{177} = 0{,}520$

такъ что вѣроятности повтореній и перемѣнъ знаковъ суть:

1. A $++$ $(0{,}481)^2 = 0{,}231$

$+-$ или $-+$ $(0{,}481)\cdot(0{,}519) = 0{,}250$

$--$ $(0{,}519)^2 = 0{,}269$

2. Z $++$ $(0{,}463)^2 = 0{,}214$

$+-$ или $-+$ $(0{,}463)\cdot(0{,}537) = 0{,}249$

$--$ $(0{,}537)^2 = 0{,}288$

3. D $++$ $(0{,}480)^2 = 0{,}230$

$+-$ или $-+$ $(0{,}480)\cdot(0{,}520) = 0{,}250$

$--$ $(0{,}520)^2 = 0{,}270$

Поэтому вѣроятное число различныхъ комбинацій знаковъ есть:

1. A $++$ $0{,}231\cdot 180 = 41.6$

$+-$ или $-+$ $0{,}250\cdot 180 = 45.0$

$--$ $0{,}269\cdot 180 = 48.4$

2. Z $++$ $0{,}214\cdot 173 = 37.0$

$+-$ или $-+$ $0{,}249\cdot 173 = 43.1$

$--$ $0{,}288\cdot 173 = 49.8$

3. D $++$ $0{,}230\cdot 173 = 39.8$

$+-$ или $-+$ $0{,}250\cdot 173 = 43.2$

$--$ $1{,}270\cdot 173 = 46.7$

Хотя число всѣхъ знаковъ въ столбцахъ A, Z и D есть 181, 177 и 177, но мы должны были умножать вѣроятности комбинацій знаковъ на 180, 173 и 173, потому, что число извѣстныхъ намъ изъ этихъ таблицъ комбинацій именно таково, вслѣдствіе недостатка трехъ наблюденій въ столбцахъ Z и D, и потому что число послѣдовательныхъ комбинацій на 1 меньше числа всѣхъ знаковъ.

8. Сравнимъ теперь полученныя нами числа съ данными нашей таблицы. Считая въ ней повторенія и перемѣны знаковъ въ столбцахъ $A-A_0$, $Z-Z_0$, $D-D_0$, мы находимъ слѣдующія числа

IV. Число повтореній и перемѣнъ знаковъ въ разностяхъ $A - A_0$, $Z - Z_0$, $D - D_0$.

1. *A*

	Теорія.	Набл.	Разность.
+ +	41.6	45	+ 3.4
+ — или — +	90.0	84	— 6.0
— —	48.4	51	+ 2.6
	180.0	180	0.0

2. *Z*

	Теорія.	Набл.	Разность.
+ +	37.0	39	+ 2.0
+ — или — +	86.2	84	— 2.2
— —	49.8	50	+ 0.2
	173.0	173	0.0

3. *D*

	Теорія.	Набл.	Разность.
+ +	39.8	51	+ 11.2
+ — или — +	86.5	65	— 21.5
— —	46.7	57	+ 10.3
	173.0	173	0.0

Вездѣ мы замѣчаемъ, что наблюденіе даетъ больше число повтореній знаковъ, чѣмъ теорія. Это имѣетъ слѣдующее значеніе. Теоретическія числа были выведены въ томъ предположеніи, что уклоненія отъ средняго, нормальнаго, значенія, въ величинахъ *A*, *Z* и *D* независимы другъ отъ друга, случайны. Оказывается, что это предположеніе несогласно съ истиной. Напро-

тивъ, мы видимъ, что существуетъ *стремленіе къ сохраненію знака*, т. е. метеорологическій характеръ даннаго года вліяетъ на метеорологическій характеръ слѣдующаго года такъ, что характеры двухъ послѣдовательныхъ годовъ чаще сходны между собою, чѣмъ противоположны. Вскрытіе и замерзаніе Невы зависятъ главнымъ образомъ отъ температурныхъ условій бассейна Невы. Поэтому можно сказать, на основаніи указаннаго свойства, что послѣ холодныхъ годовъ чаще бываютъ также холодные, чѣмъ теплые и наоборотъ, послѣ теплыхъ чаще теплые чѣмъ холодные. Обыкновенно думаютъ иначе; считаютъ, что послѣ холоднаго года слѣдуетъ ожидать теплаго и наоборотъ. Но изъ приведенныхъ чиселъ видно, что такой разсчетъ прямо невѣренъ. Это стремленіе метеорологическихъ элементовъ къ сохраненію знака, уже указанное нѣкоторыми другими метеорологами для другихъ случаевъ, мы подтвердимъ ниже еще другими доказательствами.

9. Изъ приведенныхъ сравнительныхъ таблицъ чиселъ повтореній и перемѣнъ знаковъ получаются слѣдующія вѣроятности повтореній знаковъ для явленій A, Z и D.

V. Вѣроятность повторенія знака уклоненія

	$A-A_0$	$Z-Z_0$	$D-D_0$
+	0,517	0,481	0,607
—	0,548	0,543	0,640

Эти числа получаются изъ отношенія числа повтореній даннаго знака, къ числу всѣхъ случаевъ того-же знака, такъ напр. вѣроятность повторенія знака + въ A есть $\frac{45}{87} = 0,517$ и т. п.

Вообще вѣроятность повторенія знака въ A есть 0,533

Z — 0,514

D — 0,624

и слѣдовательно вѣроятности перемѣны знака въ A — 0,467
Z — 0,486
D — 0,376

10. Точно такимъ же образомъ можно разсмотрѣть и болѣе длинные промежутки времени, въ 3, 4 и болѣе лѣтъ. Теоретическое число повтореній n разъ подъ рядъ знаковъ + или — есть p^n или q^n, т. е. для A или Z.

A. —	$(0,481)^n$	$(0,519)^n$
Z. —	$(0,463)^n$	$(0,537)^n$
D. —	$(0,480)^n$	$(0,520)^n$

Поэтому въ ряду m знаковъ, если общее число + есть mp, то вѣроятное число комбинацій + + есть mp^2, — комбинацій + + + ..mp^3 и т. д. Сосчитаемъ же число повтореній знаковъ по 2 по 3 и т. д. въ нашихъ рядахъ и сравнимъ ихъ съ теоретическими.

Въ столбцѣ A—A_0 знаки представляютъ послѣдовательно слѣдующія группы

A.

\+ 3 1 1 3 1 1 1 2 2 7 4 1 1 1 1 3 2 5 2 1 1 1 7
3 1 2 1 6 4 1 2 3 1 1 2 1 1 1 1 1 2

— (2) 3 1 1 1 2 1 2 1 1 3 10 2 4 2 3 2 1 1 5 3 3
1 3 2 6 3 1 1 1 1 1 1 1 2 1 2 5 1 1 3 1 (2)

Такъ какъ намъ неизвѣстно каковъ былъ знакъ A—A_0 раньше 1706 года и каковъ онъ будетъ послѣ 1886, то мы и не знаемъ какова длина перваго и послѣдняго изъ написанныхъ періодовъ со знаками —, которые поэтому поставлены въ скобкахъ и считаться не будутъ. Черезъ это нѣсколько измѣняется общее число знаковъ и распредѣленіе ихъ: вмѣсто 181 знака будемъ имѣть уже только 177 изъ которыхъ 87 + и 90 —, такъ что вѣроятности p и q будутъ для этого ряда

A. $p = \frac{87}{177} = 0,492$ $q = \frac{90}{177} = 0,508$.

Точно также для Z мы получимъ слѣдующій рядъ:

Z.

+ (1) 3 1 8 3 1 3 1 3 1 3 (4) 1 1 1 2 1 1 4 1 1 2

1 3 1 2 4 3 1 3 1 3 1 1 1 1 1 1 1 1 3 1 1

— (3 1 1) 2 2 1 6 1 4 2 2 2 1 (3) 4 1 4 3 1 1 2 1

5 1 2 2 1 1 1 1 3 3 3 1 3 2 2 1 4 1 3 2 1 (2)

Въ этомъ ряду приходится пропустить еще нѣсколько неполныхъ комбинацій, происходящихъ оттого, что мы не имѣемъ свѣденій о времени остановки льда въ 1709, 1712 и 1768 годахъ. Поэтому число всѣхъ знаковъ уменьшается до 162 изъ которыхъ 77+ и 85—, такъ что вѣроятности p и q будутъ для этого ряда

Z. $p = \frac{77}{162} = 0{,}475$ $q = \frac{85}{162} = 0{,}525$

Наконецъ для D получаемъ рядъ:

D.

+ (2 1) 2 1 9 2 1 2 7 2 (4) 1 1 1 2 5 3 1 1 3 7 3

3 1 1 5 1 1 1 1 1 3 4 2

— (1 1 1) 3 1 2 1 7 6 3 1 (1) 1 6 4 5 1 1 1 9 5 1

1 1 3 3 1 5 2 2 1 4 3 1 (3)

въ которомъ также выпускаемъ нѣсколько неполныхъ комбинацій, такъ что число остающихся случаевъ есть 163, изъ которыхъ 78+ и 85— и вѣроятности p и q будутъ для этого ряда

D. $p = \frac{78}{163} = 0{,}478$ $q = \frac{85}{163} = 0{,}522$

Считая число единицъ, двоекъ, . . . въ этихъ рядахъ получимъ.

VI. Число рядовъ одного знака въ $A-A_0$, $Z-Z$, $D-D_0$.

Число знаковъ въ ряду.	$A-A_0$		$Z-Z_0$		$D-D_0$	
	+	—	+	—	+	—
1	23	20	25	16	14	13
2	8	8	3	12	6	3
3	5	8	10	6	5	5
4	2	1	2	4	1	2
5	1	2	—	1	2	3
6	1	1	—	1	—	2
7	2	—	—	—	2	1
8	—	—	—	—	—	—
9	—	—	—	—	1	1
10	—	1	—	—	—	—

Отсюда можемъ легко получить число повтореній знаковъ напр. j разъ подъ рядъ въ какомъ угодно случаѣ. Дѣйствительно означимъ черезъ m_i число цифръ i въ одномъ изъ нашихъ рядовъ, напр. въ ряду $A+$, $m_1 = 23$, $m_2 = 8$ и т. д. Очевидно, что число всѣхъ знаковъ будетъ

$$m_1 + 2m_2 + 3m_3 + \ldots + im_i + \ldots$$

Число повтореній $+\ +$ будетъ

$$m_2 + 2m_3 + 3m_4 + \ldots + im_{i+1} + \ldots$$

Число комбинацій по три $+\ +\ +$

$$m_3 + 2m_4 + 3m_5 + \ldots + im_{i+2} + \ldots$$

и т. д. вообще число послѣдовательныхъ повтореній по j знаковъ есть

$$mj + 2m_{j+1} + 3m_{j+2} + \ldots + im_{j+i}$$

Такъ напр. число повтореній $+$ $+$ въ ряду $A+$ есть

$$1\cdot 8 + 2\cdot 5 + 3\cdot 2 + 4\cdot 1 + 5\cdot 1 + 6\cdot 2 = 45$$

и точно также получаются и всѣ остальныя mj для каждаго ряда.

11. Найдя по указанному способу число повтореній знаковъ данное число разъ въ рядахъ $A+$, $A-$, $Z+$, $Z-$, $D+$, $D-$ сравнимъ ихъ съ теоретическими результатами, т. е. съ величинами mp^j. Тогда мы получимъ слѣдующія таблицы.

VII. Число многократныхъ повтореній знаковъ въ рядахъ $A-A_0$, $Z-Z_0$ и $D-D_0$.

A.

+	Теорія.	Набл.	Разность.
1	87.00	87	± 0.00
2	42.76	45	+ 2.24
3	20.02	26	+ 5.98
4	10.33	15	+ 4.67
5	5.08	9	+ 3.92
6	2.50	5	+ 2.50
7	1.23	1	— 0.23

—	Теорія.	Набл.	Разность.
1	90.00	90	± 0.00
2	45.75	49	+ 3.25
3	23.20	28	+ 4.74
4	11.82	15	+ 3.18
5	6.01	10	+ 3.99
6	3.06	6	+ 2.94
7	1.55	4	+ 2.45
8	0.78	3	+ 2.22
9	0.41	2	+ 1.59
10	0.21	1	+ 0.79

Z.

+	Теорія.	Набл.	Разность.
1	77.00	77	± 0.00
2	36.60	36	— 0.60
3	17.40	20	+ 2.60
4	8.27	7	— 1.27
5	3.93	4	+ 0.07
6	1.87	3	+ 1.13
7	0.89	2	+ 1.11
8	0.42	1	+ 0.58

—	Теорія.	Набл.	Разность.
1	85.00	85	± 0.00
2	44.60	45	+ 0.40
3	23.40	21	— 2.40
4	12.27	9	— 3.27
5	6.44	3	— 3.44
6	3.38	1	— 2.38

D.

+	Теорія.	Набл.	Разность.
1	78.00	78	± 0.00
2	37.33	47	+ 9.67
3	17.86	30	+12.14
4	8.55	19	+10.45
5	4.09	13	+ 8.91
6	1.96	8	+ 6.04
7	0.94	5	+ 4.06
8	0.45	2	+ 1.55
9	0.21	1	+ 0.79

—	Теорія.	Набл.	Разность.
1	85.00	85	± 0.00
2	44.30	55	+10.70
3	23.10	36	+12.90
4	12.04	24	+11.96
5	6.28	15	+ 8.72
6	3.27	8	+ 4.73
7	1.71	4	+ 2.29
8	0,89	2	+ 1.11
9	0.46	1	+ 0.54

Почти во всѣхъ случаяхъ за немногими лишь исключеніями видно рѣзкое стремленіе къ сохраненію знака въ этихъ рядахъ. Почти вездѣ при данномъ числѣ знаковъ, число повтореній по 2, по 3... превышаетъ то, которое получается при случайномъ распредѣленіи. Поэтому мы заключаемъ что стремленіе къ сохраненію знака проявляется и въ весьма длинные промежутки времени.

Вычислимъ вѣроятности повторенія знака уклоненія послѣ даннаго числа предъидущихъ повтореній, à posteriori, по даннымъ наблюденія. Эти вѣроятности суть отношенія $\frac{m_j}{m_{j-1}}$ числа m_j случаевъ при которыхъ послѣ m_{j-1} повтореній одного и того же знака слѣдуетъ опять тотъ-же знакъ, къ числу всѣхъ m_{j-1} случаевъ. Въ слѣдующей таблицѣ даны эти вѣроятности въ тѣхъ случаяхъ, когда число наблюденныхъ примѣровъ не меньше 5.

VIII. Вѣроятности повторенія знака послѣ даннаго числа предшествующихъ повтореній.

A. (Теор. 0,500) *Z.*

	+	—
1	0.517	0.544
2	0.578	0.571
3	0.577	0.536
4	0.600	0.667
5	0.556	0.600

	+	—
1	0.467	0.530
2	0.556	0.467
3	0.350	0.429

D.

	+	—
1	0.603	0.647
2	0.638	0.654
3	0.633	0.667
4	0.684	0.625
5	0.615	0.533
6	0.625	

	±	Число случаевъ.
1	0.627	102
2	0.647	66
3	0.651	43
4	0.651	28
5	0.572	16
6	0.562	9

Вслѣдствіе сравнительно меньшаго числа наблюденій изъ которыхъ выводится каждое изъ приведенныхъ въ этой таблицѣ, а въ особенности послѣднихъ, чиселъ, онѣ представляютъ довольно неравномѣрный ходъ. Послѣдняя табличка указываетъ вѣроятность повторенія знака (какого нибудь) въ *D*, и, такъ какъ она выведена изъ вчетверо большаго числа наблюденій, чѣмъ каждая изъ предъидущихъ, то и имѣетъ во столько же разъ большій вѣсъ. Изъ нея видно, что вѣроятность повторенія знака вообще больше половины и увеличивается съ увеличеніемъ числа предъидущихъ случаевъ повторенія того-же знака, такъ какъ кромѣ послѣднихъ двухъ чиселъ, которыя выведены всего изъ 16 и 9 наблюденій, вѣроятности эти идутъ въ возрастающемъ порядкѣ.

Поэтому, если въ какомъ нибудь году метеорологическій характеръ или, можно сказать, температурныя условія бассейна Невы, представляли уклоненія отъ нормальнаго въ положительную сторону, то не только слѣдуетъ ожидать, что и въ слѣдующемъ году уклоненіе будетъ въ ту-же сторону, но, если это дѣйствительно произойдетъ, то съ тѣмъ большею вѣроятностью слѣдуетъ ожидать, что черезъ годъ повторится опять то-же самое и т. д. Напр. послѣ холоднаго года слѣдуетъ ожидать, что и слѣдующій годъ будетъ также холодный; послѣ двухъ послѣдовательныхъ холодныхъ годовъ съ еще большею вѣроятностью

слѣдуетъ ожидать что и слѣдующій также будетъ холодный; послѣ трехъ еще больше и т. д.

12. Уже à priori можно ожидать, что такое-же стремленіе къ сохраненію характера проявится и въ предѣлахъ одного года, такъ что за раннимъ вскрытіемъ Невы будетъ чаще слѣдовать позднее замерзаніе ея чѣмъ раннее и наоборотъ. Счисленіе комбинацій знаковъ + и — въ соотвѣтственныхъ строкахъ столбцовъ $A—A_0$ и $Z—Z_0$ подтверждаетъ это сужденіе. Въ слѣдующей таблицѣ дано число случаевъ $A+$ $Z+$, $A+$ $Z—$, $A—$ $Z+$ и $A—$ $Z—$ и ихъ апріорныя вѣроятности, выведенныя изъ предположенія случайности, независимости обоихъ явленій.

IX. Число различныхъ комбинацій знаковъ между $A—A_0$ и $Z—Z_0$.

	Теорія.	Набл.	Разность.
+ +	39.4	36	— 3.4
+ —	45.6	49	+ 3.4
— +	42.6	46	+ 3.4
— —	49.4	46	— 3.4
	177.0	177	0.0

Здѣсь мы видимъ совершенно обратное распредѣленіе разностей, сравнительно съ тѣмъ, которое мы видѣли, когда считали число комбинацій знаковъ въ рядахъ A, Z и D отдѣльно.— Число повтореній оказывается меньше случайнаго, число перемѣнъ больше. Такъ оно и должно быть, ибо явленія A и Z противоположны такъ что перемѣна знака означаетъ сохраненіе метеорологическаго характера въ предѣлахъ одного года; вѣроят-

ности различныхъ комбинацій знаковъ A и Z выведенныя à posteriori будутъ поэтому слѣдующія

Вѣроятность, что послѣ $A+$ слѣдуетъ $Z+$ есть $\frac{36}{85} = 0{,}424$

» » » $A+$ » $Z-$ » $\frac{49}{85} = 0{,}576$

Вѣроятность, что послѣ $A-$ слѣдуетъ $Z+$ есть $\frac{46}{92} = 0{,}500$

» » » $A-$ » $Z-$ » $\frac{46}{92} = 0{,}500$

или, иначе:

вѣроятность того, что послѣ ранняго вскрытія Невы будетъ позднее замерзаніе или послѣ поздняго вскрытія раннее замерзаніе есть $\frac{95}{177} = 0{,}540$

вѣроятность того, что послѣ ранняго вскрытія будетъ также раннее замерзаніе или послѣ поздняго вскрытія также позднее замерзаніе есть $\frac{82}{177} = 0{,}460$

Еще рѣзче это выражено въ послѣдовательности знаковъ даннаго Z и слѣдующаго A, т. е. вліяніе времени замерзанія Невы на время вскрытія ея въ слѣдующемъ году. Здѣсь численіе комбинацій знаковъ даетъ слѣдующій результатъ

	Теорія.	Набл.	Разность.
+ +	39.4	34	− 5.4
+ −	45.6	48	+ 2.4
− +	42.6	52	+ 9.4
− −	49.4	43	− 6.4
	177.0	177	0.0

13. Обратимся теперь къ столбцамъ озаглавленнымъ ΔA, ΔZ, ΔD, и будемъ считать въ нихъ число различныхъ комбинацій знаковъ.

Сперва разсмотримъ какова зависимость между знаками $A-A_0$ и ΔA, $Z-Z_0$ и ΔZ, $D-D_0$ и ΔD. Для этого сосчитаемъ, какъ мы это дѣлали и выше. число комбинацій $++$, $+-$, $-+$ и $--$ въ соотвѣтствующихъ строкахъ каждой пары столбцовъ. Въ столбцахъ ΔA, ΔZ, ΔD, вообще встрѣчаются слѣдующіе знаки

ΔA	$+$ 93	$-$ 82	± 0 5	
ΔZ	$+$ 85	$-$ 81	± 0 7	? 6
ΔD	$+$ 81	$-$ 82	± 0 .. 10	? 6

такъ что вѣроятности $+$ и $-$ въ этихъ столбцахъ суть

ΔA	$+ \ldots \frac{93}{175}$	$- \ldots \frac{82}{175}$
ΔZ	$+ \ldots \frac{85}{166}$	$- \ldots \frac{81}{166}$
ΔD	$+ \ldots \frac{81}{163}$	$- \ldots \frac{82}{163}$

Нулей мы считать не будемъ. Число различныхъ знаковъ въ тѣхъ строкахъ $A-A_0$, $Z-Z_0$, $D-D_0$, которыя соотвѣтствуютъ строкамъ ΔA, ΔZ, ΔD содержащимъ или $+$ или $-$ (а не 0 или ?) есть слѣдующее

$A-A_0$	$+$ .. 84	$-$ .. 91
$Z-Z_0$	$+$ .. 81	$-$ .. 85
$D-D_0$	$+$ .. 83	$-$ .. 80

Но не всѣ комбинаціи между знаками $A-A_0$ и ΔA, ... возможны, и нельзя считать эти знаки независимыми одинъ отъ другаго. Въ самомъ дѣлѣ очевидно, что изъ 8 комбинацій

	$A-A_0$	ΔA	$A-A_0$
1.	+	+	+
2.	+	+	—
3.	+	—	+
4.	—	+	+
5.	+	—	—
6.	—	+	—
7.	—	—	+
8.	—	—	—

невозможны 2-я и 7-я, ибо первая изъ нихъ выражаетъ, что $A-A_0$ было иоложительно, затѣмъ увеличилось, и стало отрицательнымъ, — что́ немыслимо; а 7-я выражаетъ, что $A-A_0$ было отрицательно, затѣмъ уменьшилось и стало положительнымъ, что также немыслимо. Остающіяся шесть комбинацій можно расположить въ слѣдующія четыре группы

	$A-A_0$	ΔA	$A-A_0$
1.	+	±	+
2.	+	(—)	—
3.	—	(+)	+
4.	—	±	—

изъ нихъ только крайнія комбинаціи даютъ одинаковые знаки для $A-A_0$ и ΔA, а всѣ остальныя — различныя; вѣроятности различныхъ послѣдовательностей знаковъ между $A-A_0$ и ΔA будутъ поэтому слѣдующія:

$A-A_0$	ΔA	
+	+	$p_1^2 p_2$
+	—	$p_1^2 q_2 + p_1 q_1 = p_1 (1 - p_1 p_2)$
—	+	$q_1^2 p_2 + p_1 q_1 = q_1 (1 - q_1 q_2)$
—	—	$q_1^2 q_2$

и точно такія же формулы очевидно имѣютъ мѣсто и для $Z—Z_0$, и $D—D_0$. Въ числахъ имѣемъ вѣроятности:

А. + + $\frac{84}{175} \cdot \frac{84}{175} \cdot \frac{93}{175}$

+ — $\frac{84}{175} \cdot (1 - \frac{84}{175} \cdot \frac{93}{175})$

— + $\frac{91}{175} \cdot (1 - \frac{91}{175} \cdot \frac{82}{175})$

— — $\frac{91}{175} \cdot \frac{91}{175} \cdot \frac{82}{175}$

а умноживъ эти величины на 175, получимъ вѣроятное число различныхъ комбинацій знаковъ. Въ слѣдующей таблицѣ сопоставлены вычисленныя такимъ образомъ числа съ тѣми, которыя даетъ прямое счисленіе различныхъ послѣдовательностей по данному выше списку.

X. Число различныхъ комбинацій знаковъ въ соотвѣтствующихъ строкахъ $A—A_0$ и ΔA, $Z—Z_0$ и ΔZ, $D—D_0$ и ΔD.

A.

	Теорія.	Набл.	Разность.
+ +	21.4	25	+ 3.6
+ —	62.6	59	— 3.6
— +	68.8	69	+ 0.2
— —	22.2	22	— 0.2
	175.0	175	± 0.0

Z.

	Теорія.	Набл.	Разность.
+ +	21.2	16	— 5.2
+ —	63.8	65	+ 2.2
— +	60.8	69	+ 8.2
— —	20.2	16	— 4.2
	166.0	166	± 0.0

D.

	Теорія.	Набл.	Разность.
+ +	20.5	24	+ 3.5
+ —	60.5	59	— 0.5
— +	60.8	57	— 3.8
— —	20.2	23	+ 2.8
	163.0	163	± 0.0

Изъ этихъ чиселъ нельзя вывести никакого положительнаго заключенія о взаимной зависимости знаковъ уклоненій и послѣдовательныхъ разностей. Въ A разности теор.-набл. поперемѣнно различныхъ знаковъ; въ Z наблюденіе даетъ меньшее число повтореній знака, чѣмъ теорія; въ D напротивъ большее. Поэтому должно думать, что взятый нами рядъ недостаточенъ, чтобы показать, существуетъ ли въ метеорологическомъ характерѣ каждаго года стремленіе возвращаться отъ всякаго уклоненія назадъ, къ среднему типу, или напротивъ уклоняться еще больше въ ту же сторону.

Точно также можно было бы изслѣдовать и зависимость между ΔA и ΔZ, ΔZ и $A-A_0$ и т. п., но счисленіе числа комбинацій знаковъ этихъ количествъ не приводитъ къ новымъ интереснымъ результатамъ.

14. Наконецъ я разсмотрю еще распредѣленіе *величинъ* уклоненій $A-A_0$..; до сихъ поръ я разбиралъ только распредѣленіе знаковъ этихъ количествъ; теперь же введу въ разсмотрѣніе величину ихъ.

Извѣстно, что тѣ явленія, которыя представляютъ одинъ среднiй типъ съ случайными уклоненіями отъ него въ обѣ стороны, — подчиняются закону случайныхъ ошибокъ наблюденій, т. е. распредѣленіе уклоненій отъ средняго типа, въ такихъ

явленіяхъ такое-же какъ и распредѣленіе ошибокъ разной величины въ рядѣ наблюденій, — извѣстное изъ теоріи способа наименьшихъ квадратовъ. Вѣроятность, что въ данномъ ряду наблюденій встрѣчается ошибка равная x есть

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} dx$$

гдѣ h есть нѣкоторое постоянное (мѣра точности) зависящее отъ точности измѣреній. Вѣроятность, что въ томъ-же ряду наблюденій встрѣчается ошибка въ предѣлахъ a и b есть

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_a^b e^{-h^2x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{ah}^{bh} e^{-t^2} dt$$

Значенія этого интеграла можно найти изъ таблицъ, приложенныхъ къ различнымъ сочиненіямъ по теоріи вѣроятностей, напр., «Основанія математической теоріи вѣроятностей» В. Я. Буняковскаго и др.

Тѣми-же самыми формулами выражается и распредѣленіе уклоненій отъ средняго типа въ рядѣ какихъ нибудь явленій природы или предметовъ, имѣющихъ средній типъ. Эти, такъ сказать, ошибки природы подчиняются тому-же закону распредѣленія, какъ и дѣйствительныя ошибки наблюденій, какъ это показалъ Quetelet на множествѣ примѣровъ взятыхъ изъ статистики, и въ особенности на примѣрѣ распредѣленія человѣческаго роста. Поэтому кривую, уравненіе которой есть

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}$$

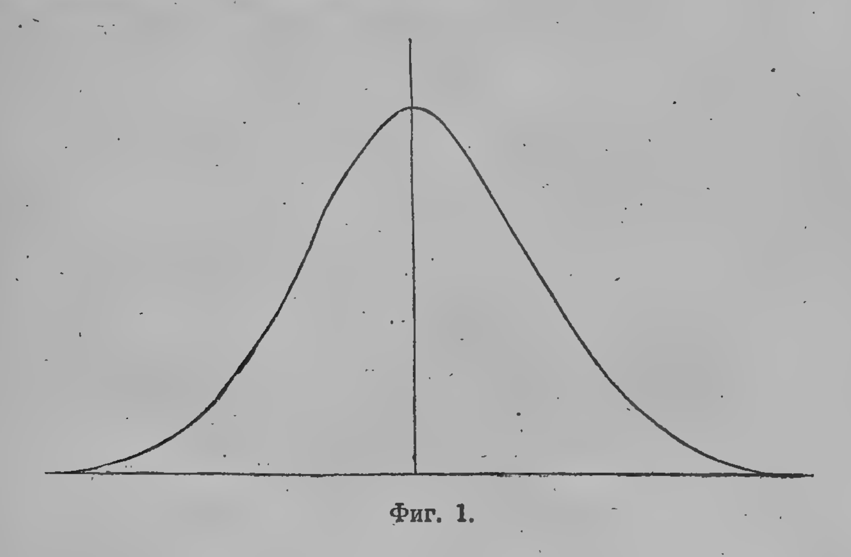
иногда называютъ *статистической кривою*; мы и будемъ пользоваться этимъ названіемъ.

Свойства этой кривой слѣдующія: ордината ея имѣетъ maximum на оси y-овъ; отсюда кривая понижается по обѣимъ сторонамъ оси ординатъ, относительно которой она симметрична; сперва вогнутость ея направлена въ сторону оси x-овъ; въ точкахъ

$$x = \pm \frac{1}{h\sqrt{2}} \qquad y = \frac{h}{\sqrt{\pi e}}$$

кривая перегибается, и направляется вогнутостью въ обратную сторону, и отсюда стремится асимптотически къ оси x-овъ.

На фиг. 1 изображена статистическая кривая для $h = 1$. При меньшихъ значеніяхъ h она имѣетъ видъ болѣе сжатый, при большихъ — болѣе растянутый.



Фиг. 1.

15. Уже выше было указано, что въ ряду данныхъ о вскрытіи и замерзаніи Невы положительныя и отрицательныя уклоненія отъ средней не одинаково вѣроятны, такъ что кривая, изображающая распредѣленіе этихъ уклоненій будетъ не вполнѣ симметрична относительно оси ординатъ; однако разность эта весьма не велика, какъ мы сейчасъ увидимъ.

Считая число разностей различной величины въ столбцѣ $A—A_0$ мы находимъ, что онѣ распредѣлены слѣдующимъ образомъ:

Распредѣленіе величинъ уклоненій отъ средняго въ времени вскрытія Невы (A).

+ 20 . . + 15		5
+ 15 . . + 10		15
+ 10 . . + 5		21
+ 5 . . ± 0		45
± 0 . . — 5		50
— 5 . . — 10		22
— 10 . . — 15		14
— 15 . . — 20		6
— 20 . . — 25		2
— 25 . . — 30		.
— 30 . . — 35		.
— 35 . . — 40		1
		181

Эти числа мы подвергнемъ операціи *сглаживанія* т. е. замѣнимъ ихъ другими, представляющими болѣе правильный ходъ, и получающимися изъ этихъ посредствомъ замѣны данной прямымъ наблюденіемъ, эмпирической кривой, рядомъ параболъ, проведенныхъ черезъ нѣсколько сосѣднихъ точекъ и подобранныхъ по способу наименьшихъ квадратовъ такъ, чтобы онѣ какъ можно ближе примыкали къ эмпирической кривой, [1]) и кромѣ того, вставимъ между каждыми двумя числами таблицы промежуточное, опредѣленное тѣмъ же способомъ.

Примѣняя здѣсь формулу сглаживанія по семи ординатамъ, третьяго порядка (по терминологіи Скіапарелли) мы замѣнимъ каждое y_0 соотвѣтствующее нѣкоторому значенію $x = x_0$, слѣдующимъ выраженіемъ

$$y = \frac{1}{21}\left(-2y_{-3} + 3y_{-2} + 6y_{-1} + 7y_0 + 6y_1 + 3y_2 - 2y_3\right)$$

[1]) G. V. Schiaparelli. Del modo di ricavare la vera espressione delle leggi della natura dalle curve empiriche. Appendice alle Effemeridi astronomiche di Milano per l'anno 1867.

гдѣ y_{-3}, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, y_3, означаютъ послѣдовательныя, равноотстоящія ординаты нашей кривой соотвѣтствующія значеніямъ x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3. Такое сглаживаніе даетъ намъ вмѣсто написаннаго выше ряда слѣдующій

— 25 . . — 20	1.6
— 20 . . — 15	4.7
— 15 . . — 10	14.1
— 10 . . — 5	29.9
— 5 . . ∓ 0	38.8
∓ 0 . . + 5	38.8
+ 5 . . + 10	30.4
+ 10 . . + 15	15.2
+ 15 . . + 20	5.0
+ 20 . . + 25	2.1
+ 25 . . + 30	0.0
	180.6

Затѣмъ вставляемъ промежуточныя ординаты по формулѣ:

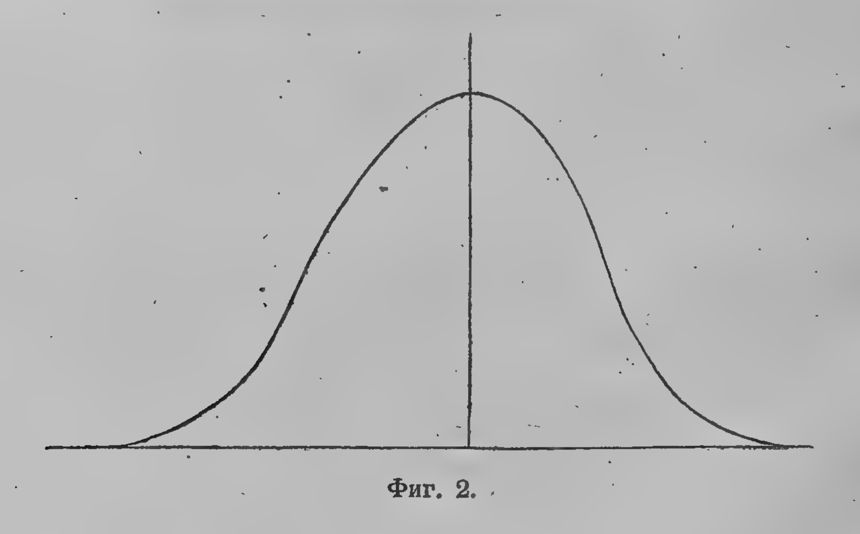
$$y_0 = \frac{1}{32}(-3y_{-5/2} + 7y_{-3/2} + 12y_{-1/2} + 12y_{1/2} + 7y_{3/2} - 3y_{5/2})$$

гдѣ y_0 означаетъ ординату промежуточную между $y_{-1/2}$ и $y_{1/2}$ или $y_{-3/2}$ и $y_{3/2}$ и т. п. Мы получимъ такимъ образомъ слѣдующія значенія координатъ кривой распредѣленія величинъ уклоненій:

x	y
— 10	0.5
— 9	1.6
— 8	2.6
— 7	4.7
— 6	10.0
— 5	14.1
— 4	22.2
— 3	29.9
— 2	34.1
— 1	38.8
∓ 0	39.4

x	y
$\mp$ 0	39.4
$\pm$ 1	38.8
$\pm$ 2	34.5
$\pm$ 3	30.4
$\pm$ 4	22.9
$\pm$ 5	15.2
$\pm$ 6	11.1
$\pm$ 7	5.0
$\pm$ 8	3.2
$\pm$ 9	2.1
$\pm$ 10	0.4

На фиг. 2 изображена эта кривая; какъ видно она весьма сходна съ статистическою. Такой же результатъ получился бы и для Z. О D мы поговоримъ ниже особо.



Фиг. 2.

16. Если мы хотимъ изучать зависимость между величиною уклоненія отъ средняго типа въ данномъ году и въ слѣдующемъ за даннымъ, то можемъ поступить слѣдующимъ образомъ.

Сосчитаемъ какъ распредѣляются различныя величины $D-D_0$ въ зависимости отъ величины предшествующаго $D-D_0$. Мы получимъ тогда слѣдующую таблицу.

	—50..—45	—45..—40	—40..—35	—35..—30	—30..—25	—25..—20	—20..—15	—15..—10	—10..—5	—5..∓0	∓0..+5	+5..+10	+10..+15	+15..+20	+20..—25	+25..+30	+30..+35	+35..+40	+40..+45	+45..+50
+40..+45	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
+35..+40	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
+30..+35	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	1
+25..+30	.	.	.	.	.	.	.	1	2	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.
+20..+25	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.
+15..+20	.	.	.	1	.	.	.	2	2	.	1	3	1	3	1	1	.	.	.	.
+10..+15	.	.	.	.	.	.	.	2	.	1	2	2	4	.	1	1	.	.	.	.
+ 5..+10	.	.	.	.	1	1	.	1	7	.	2	6	4	2	1	.	.	.	.	.
± 0..+ 5	.	.	.	.	.	2	1	1	2	2	1	2	.	2	.	.	1	1	.	.
— 5..± 0	1	.	.	.	.	1	1	.	3	2	.	1	.	2	.	1	1	.	.	.
—10..— 5	.	.	.	.	.	2	4	1	14	2	1	5	1	2	.	2	.	.	.	.
—15..—10	.	.	1	.	1	.	2	2	2	.	1	3	.	.	.	1	.	.	.	.
—20..—15	.	.	.	.	.	1	2	.	1	3	1	2	1	1	.	.	.	.	.	1
—25..—20	.	.	.	.	2	.	.	1	.	1	3	1	.	.	.	.	.	.	.	.
—30..—25	.	.	.	1	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
—35..—30	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
—40..—35	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
—45..—40	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.

Каждое изъ приведенныхъ чиселъ означаетъ число случаевъ (годовъ) когда послѣ уклоненія данной величины, означенной вверху таблицы противъ соотвѣтствующихъ вертикальныхъ столбцовъ, слѣдующій годъ представлялъ уклоненіе отъ средняго, означенное слѣва таблицы, противъ соотвѣтствующихъ горизонтальныхъ строкъ. Такъ напр. 4-ая строка указываетъ что былъ 1 случай уклоненія въ промежуткѣ +25 . . +35 послѣ

года, уклоненіе котораго было —15..—10, 2 случая когда послѣ года —10..—5, слѣдовалъ годъ +25..+30 и т. д.

Вслѣдствіе сравнительно небольшаго числа наблюденій, приходящагося для каждой категоріи случаевъ, числа эти, хотя и представляютъ достаточно ясное распредѣленіе, однако подвержены довольно значительнымъ случайнымъ колебаніямъ вслѣдствіе чего полезно и ихъ сгладить. Сглаживаніе функцій отъ двухъ перемѣнныхъ можно производить совершенно также какъ и сглаживаніе функцій отъ одной перемѣнной. Мы не можемъ здѣсь распространяться о теоріи сглаживанія, которая будетъ изложена въ иной, уже почти оконченной работѣ нашей. Мы ограничимся здѣсь простымъ догматическимъ утвержденіемъ тѣхъ положеній, доказательства которыхъ будутъ даны нами въ своемъ мѣстѣ.

Можно показать, что сглаживаніе таблицы съ двумя входами, т. е. ряда значеній функціи соотвѣтствующихъ различнымъ значеніямъ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ, можетъ быть сведена къ двумъ послѣдовательнымъ сглаживаніямъ строкъ и столбцовъ таблицы, т. е. сперва по одной перемѣнной, потомъ по другой, причемъ порядокъ сглаживанія не вліяетъ на результатъ. Можно сгладить сперва всѣ строки, и въ сглаженной таблицѣ сгладить столбцы, или наоборотъ сперва сгладить столбцы, потомъ въ полученной сглаженной таблицѣ сгладить строки, — результатъ получится въ обоихъ случаяхъ одинаковый. Для нашего примѣра можно взять формулу, уже указанную выше

$$y = \frac{1}{21}(-2y_{-3} + 3y_{-2} + 6y_{-1} + 7y_0 + 6y_1 + 3y_2 - 2y_3)$$

по которой, на основаніи семи послѣдовательныхъ значеній y — находится исправленное среднее значеніе его. Послѣ сглаживанія по одному направленію, помощью той же формулы сглаживаемъ по другому. Результатъ получающійся отъ такой двойной операціи получился бы прямо если бы выводить значеніе y изъ 49 окружающихъ его значеній по формулѣ:

Къ стран. 35.

	—30...—25	—25...—20	—20...—15	—15...—10	—10...— 5	— 5...∓ 0	∓ 0...+ 5	+ 5...+10	+10...+15	+15...+20	+20...+25	+25...+30
+25...+30	1	2	5	2	5	2	3	6	7	5	3	.
+20...+25	.	3	5	3	5	3	5	11	10	7	6	2
+15...+20	.	1	7	7	9	11	14	19	19	14	9	3
+10...+15	2	3	11	12	12	16	20	24	22	18	9	3
+ 5...+10	3	4	10	13	13	18	13	23	22	19	10	4
± 0...+ 5	5	5	16	25	24	26	15	18	18	17	8	5
— 5...± 0	7	6	22	30	28	29	23	12	15	14	7	7
—10...— 5	6	8	22	30	28	24	21	11	13	10	7	8
—15...—10	6	7	20	25	27	25	25	12	12	10	6	5
—20...—15	6	8	16	16	18	18	20	15	16	4	3	2
—25...—20	4	7	5	2	4	6	8	10	4	2	2	.
—30...—25	3	3	2	2	3	5	5	6	2	1	1	.

$$z=\frac{1}{441}\left\{\begin{array}{l}
+4z_{-3,-3}-6z_{-2,-3}-12z_{-1,-3}-14z_{\mp 0,-3}-12z_{+1,-3}-6z_{+2,-3}+4z_{+3,-3}\\
-6z_{-3,-2}+9z_{-2,-2}+18z_{-1,-2}+21z_{\mp 0,-2}+18z_{+1,-2}+9z_{+2,-2}-6z_{+3,-2}\\
-12z_{-3,-1}+18z_{-2,-1}+36z_{-1,-1}+42z_{\mp 0,-1}+36z_{+1,-1}+18z_{+2,-1}-12z_{+3,-1}\\
-14z_{-3,\mp 0}+21z_{-2,\mp 0}+42z_{-1,\mp 0}+49z_{\mp 0,\mp 0}+42z_{+1,\mp 0}+21z_{+2,\mp 0}-14z_{+3,\mp 0}\\
-12z_{-3,+1}+18z_{-2,+1}+36z_{-1,+1}+42z_{\mp 0,+1}+36z_{+1,+1}+18z_{+2,+1}-12z_{+3,+1}\\
-6z_{-3,+2}+9z_{-2,+2}+18z_{-1,+2}+21z_{\mp 0,+2}+18z_{+1,+2}+9z_{+2,+2}-6z_{+3,+2}\\
+4z_{-3,+3}-6z_{-2,+3}-12z_{-1,+3}-14z_{\mp 0,+3}-12z_{+1,+3}-6z_{+2,+3}+4z_{+3,+3}
\end{array}\right\}$$

Здѣсь мы означили сглаживаемыя ординаты черезъ z, со значками, означающими координаты точекъ въ которыхъ онѣ возставлены или значенія независимыхъ перемѣнныхъ отъ которыхъ онѣ зависятъ. Такъ $z_{i,j}$ означаетъ значеніе z при $x=x_i$, $y=y_j$.

Конечно удобнѣе сглаживать какъ было выше сказано сперва по одному направленію, потомъ по другому.

Прилагая эти формулы къ занимающему насъ примѣру, и ограничиваясь тою частью таблицы которая отдѣлена пунктирною линіей на табл. мы получимъ слѣдующія сглаженныя значенія (для краткости всѣ числа помножены на 10, и вездѣ написано не болѣе двухъ знаковъ, т. е. отброшены дроби. См. приложенную таблицу).

Кромѣ самихъ чиселъ на этой таблицѣ нанесены кривыя линіи соединяющія равныя значенія чиселъ; это суть проэкціи на плоскость чертежа воображаемой поверхности распредѣленія, ординаты которой, перпендикулярныя къ плоскости чертежа измѣряются написанными числами.

Изученіе такихъ поверхностей распредѣленіе иногда весьма поучительно. Изъ нашего чертежа можно извлечь слѣдующія свойства ея.

Во первыхъ видно, что линіи равныхъ значеній, — короче горизонтали, — вытянуты по направленію отъ лѣваго нижняго угла къ правому верхнему; т. е. большія значенія ординатъ поверхности встрѣчаются въ этихъ двухъ углахъ, меньшія въ пра-

вомъ нижнемъ и лѣвомъ верхнемъ. Это зависитъ отъ найденнаго выше инымъ способомъ свойства сохраненія знака метеорологическаго характера; дѣйствительно изъ этого свойства слѣдуетъ что равнозначныя комбинаціи уклоненій двухъ послѣдовательныхъ годовъ встрѣчаются чаще чѣмъ разнозначныя. Эта же вытянутость горизонталей проявилась бы и въ поверхностяхъ распредѣленія $A—A_0$ и $Z—Z_0$, но въ гораздо меньшей степени, такъ какъ, какъ мы видѣли выше это свойство сохраненія знака выражено въ наиболѣе сильной степени въ D. Мы вычисляли сглаженныя значенія ординатъ поверхностей распредѣленія $A—A_0$ и $Z—Z_0$, и вычерчивали ихъ горизонтали; но онѣ представляютъ мало интереса, поэтому мы ихъ и не приводимъ.

Изъ того-же чертежа видно что горизонтали разрываются и указываютъ на два отдѣльныхъ максимума, двѣ вершины поверхности распредѣленія, одну — около —10, другую около +10. Это значитъ, что существуетъ два типа годовъ, рѣзко различающихся между собою по продолжительности свободнаго состоянія Невы. Одинъ типъ съ среднею продолжительностью $D = 220$ дней (219.0 + 1.0) другой 218, съ случайными уклоненіями въ обѣ стороны; другими словами на эту продолжительность вліяютъ двѣ различныя причины, (физическое опредѣленіе которыхъ не есть задача математика, и не можетъ быть дано на основаніи только того матеріала изслѣдованіе котораго составляетъ предметъ этой статьи). Горизонтали болѣе близки одна къ другой и ихъ больше въ лѣвой нижней части чертежа; это означаетъ, что изъ двухъ неизвѣстныхъ причинъ та, которая даетъ среднюю продолжительность $D = 218$ дней болѣе постоянна, чѣмъ та которая даетъ $D = 220$ дней; ибо поверхность распредѣленія около точки —10 имѣетъ большую кривизну чѣмъ около точки +10, слѣдовательно статистическія кривыя получающіяся отъ пересѣченія этой поверхности плоскостями перпендикулярными къ плоскости чертежа болѣе узки въ первомъ случаѣ и болѣе растянуты во второмъ. Ни въ A ни въ Z не проявляется такой раздвоенности. Какъ вскрытіе, такъ и замерзаніе Невы имѣютъ одинъ

типъ, отъ котораго отдѣльные года уклоняются въ разныя стороны согласно съ гипотезою случайнаго распредѣленія ошибокъ природы, какъ это мы видѣли на статистической кривой построенной для A. Тѣмъ болѣе загадочна эта зависимость отъ двухъ причинъ въ продолжительности D.

3.2

